

一种基于状态空间实现的频率估计与 频率时延联合估计算法的研究*

吴云韬 廖桂生 陈建峰

西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室, 西安 710071

摘要 提出了一种基于状态空间实现的正弦信号的频率、时延联合估计新方法, 其频率估计由状态过渡矩阵的特征值获得, 同时时延估计则由观测矩阵和估计的频率给出, 用正弦信号验证了该方法的性能.

关键词 正弦信号 频率估计 时延估计

正弦信号的频率估计^[1]和基于双基元的时间延迟估计^[2]是信号处理中两个活跃的研究主题, 该问题有着广泛的应用背景, 如语音增强^[3]、CDMA系统的同步问题^[4]、生物医学工程^[5]以及雷达、声纳等领域.

基于双基元的接收信号数据模型可以表示为:

$$\begin{aligned} r_1(n) &= s(n) + q_1(n), \\ r_2(n) &= s(n - D) + q_2(n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

$$(2)$$

这里 $s(n) = \sum_{i=1}^P \alpha_i e^{j\omega_i n}$, 信号幅度 α_i 是未知的复常数, 假定归一化的频率 ω_i 各不相同; $q_1(n)$ 和 $q_2(n)$ 是互不相关的方差为 σ_n^2 的复 Gauss 白噪声. 且假定正弦波数目 P 是先验已知或者已由某一检测方法获得 P ^[6]. 参数 D 表示由两个阵元引起的相对时延, N 为采样数.

对于单个正弦信号, 文献[7]用基于离散 Fourier 变换的方法获得了精确的时延和频率估计, 而对于多个正弦波的情形, Sherman^[5]等给出了一种 ESPRIT 算法^[8]估计时延 D , 同时用一种广义 Yule-Walker 方法分别实现了频率的估计^[9]. 文献[10]给出了一种基于子空间的频率、时延联合估计方法, 由于其频率估计由构造的矩阵的特征矢量给出, 因而其分辨率受到其精度的限制. 本文提出了

一种基于状态空间实现的频率、时延联合估计新方法, 由于频率估计由特征值获得, 且状态空间方法对模型误差不敏感^[11,12], 与文献[10]相比, 具有更好的数值稳定性. 另一方面, 传统的时延估计方法因具有分辨率低, 信噪比要求高而需要预滤波的缺点^[2], 大大限制了其在实际中的应用, 而本文方法的时延估计结果具有闭式解, 不需要搜索计算, 且在低信噪比情况下具有较高的估计精度. 最后, 模拟结果表明在一定信噪比条件下, 本文方法估计的性能接近于相应的 CRLB(Cramer-Rao lower bound)下界.

1 基本原理

首先生成一个时间状态空间模型, 用接收的信号数据, 可以形成下面的两组向量:

$$\mathbf{x}_1(k) = [r_1(k), r_1(k+1), \dots, r_1(k+M-1)]^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_2(k) = [r_2(k), r_2(k+1), \dots, r_2(k+M-1)]^T, \quad (4)$$

这里 $k = 0, 1, \dots, K-1$, $K = N - M + 1$, T 表示转置算子, 参数 M 表示每个向量的长度. 将(1)和(2)式代入(3)及(4)式有:

$$\mathbf{x}_1(k) = \mathbf{A}(\omega)s(k) + \mathbf{Q}_1(k), \quad (5)$$

2002-12-10 收稿, 2003-02-24 收修稿

* 国家自然科学基金(批准号: 60172028)和国家教育部“跨世纪优秀人才计划”基金资助项目

E-mail: wuyuntao6@163.com

$$\mathbf{x}_2(k) = \mathbf{A}(\omega)\Delta(\omega, D)\mathbf{s}(k) + \mathbf{Q}_2(k), \quad (6)$$

这里

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\omega) &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_P], \\ \mathbf{a}_m &= [1, e^{j\omega_m}, \dots, e^{j\omega_m(M-1)}]^T, m = 1, 2, \dots, P, \\ \mathbf{s}(k) &= [\alpha_1 e^{j\omega_1 k}, \alpha_2 e^{j\omega_2 k}, \dots, \alpha_P e^{j\omega_P k}]^T, \\ \mathbf{Q}_1(k) &= [q_1(k), q_1(k+1), \dots, q_1(k+M-1)]^T, \\ \mathbf{Q}_2(k) &= [q_2(k), q_2(k+1), \dots, q_2(k+M-1)]^T, \\ \Delta(\omega, D) &= \text{diag}\{e^{-jD\omega_1}, e^{-jD\omega_2}, \dots, e^{-jD\omega_P}\}. \end{aligned}$$

从上式中可以看出, 时延和频率信息分别包含在 Vandermonde 矩阵 $\mathbf{A}(\omega)$ 和对角矩阵 $\Delta(\omega, D)$ 中. 设

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\omega) \\ \mathbf{A}(\omega)\Delta(\omega, D) \end{bmatrix} \mathbf{s}(k) + \mathbf{e}(k),$$

$\mathbf{s}(k)$ 表示状态向量, 那么有

$$\mathbf{s}(k+1) = \Phi \mathbf{s}(k), \quad (7)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{B}(\omega, D)\mathbf{s}(k) + \mathbf{e}(k), \quad (8)$$

这里

$$\Phi = \text{diag}[e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_P}] \quad (9)$$

称为状态过渡矩阵.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\omega) \\ \mathbf{A}(\omega)\Delta(\omega, D) \end{bmatrix} \quad (10)$$

称为观测矩阵. 将由给定的数据去估计出系统矩阵 \mathbf{B} 和 Φ , 如频率已知, 那么可以利用 $\Delta(\omega, D)$ 的结构给出时延 D 的估计.

1.1 状态空间实现

设 $L \geq 2$ 是一给定的整数, 定义一 $2ML \times 1$ 向量

$$\mathbf{y}_L(k) = [\mathbf{y}^T(k), \mathbf{y}^T(k+1), \dots, \mathbf{y}^T(k+L-1)]^T$$

通过迭代状态空间模型有

$$\mathbf{y}_L(k) = \Omega_L \mathbf{s}(k) + \mathbf{e}_L(k), k = 1, 2, \dots, K-L+1,$$

上式中 $\mathbf{e}_L(k)$ 与 $\mathbf{y}_L(k)$ 类似定义,

$$\Omega_L = [\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\Phi)^T \dots (\mathbf{B}\Phi^{L-1})^T]^T, \quad (11)$$

这里 $2ML \times P$ 矩阵 Ω_L 称为状态空间模型的可观测矩阵(通常定义 $L=P$). 这里假定 Ω_{L-1} 有列满秩 P , 显然, 一个必要条件是 $2M(L-1) \geq P$. 若 $P \leq 2M$, 一个充分的条件是 \mathbf{B} 有满秩. 假如 Ω_L 已知, 那么很容易得到 \mathbf{B} 和 Φ . 事实上, 可以认为矩阵 Ω_L 的列矢量张成了广义的信号子空间, 因而, 利用数据 \mathbf{y}_L , 状态空间方法将通过估计信号子空间而实现参数的估计. 对于白 Gauss 噪声情形, 由于 $L \geq 2$, 所以有

$$\mathbf{R}_{e_L}(L) = E[\mathbf{e}_L(k)\mathbf{e}_L^H(k-L)] = \mathbf{0}_{2ML \times 2ML}$$

定义 $\mathbf{y}_L(k)$ 的采样协方差矩阵

$$\hat{\mathbf{R}}_{y_L}(L) = \frac{1}{K} \sum_{k=L+1}^{K-L+1} \mathbf{y}_L(k)\mathbf{y}_L^H(k-L),$$

即 $\mathbf{R}_{y_L}(L) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{R}}_{y_L}(L)$, 由各态历经性质, 表明

$$\mathbf{R}_{y_L}(L) = \Omega_L \mathbf{R}_{ss} \Omega_L^H,$$

这里 \mathbf{R}_{ss} 表示秩为 P 的信号互协方差矩阵. 因此, $\mathbf{R}_{y_L}(L)$ 有秩 P , 其列空间和矩阵 Ω_L 的列空间一致, 从而信号子空间可以由矩阵 \mathbf{R}_{y_L} 的 P 个主特征值对应的特征矢量得到. 在实际应用中, 用数据采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_{y_L}$ 代替 \mathbf{R}_{y_L} . 设

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{l=1}^{2ML} \lambda_l \mathbf{u}_l \mathbf{v}_l^H$$

为 $\hat{\mathbf{R}}$ 的奇异值分解, 这里 λ_l 表示奇异值(按降序排列), \mathbf{u}_l 和 \mathbf{v}_l 分别表示左、右奇异向量. 那么对于 N 趋于无穷大(或高信噪比)条件下, 有

$$\text{span}([\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_P]) \approx \text{span}(\Omega_L),$$

因此信号子空间可以由矩阵 $\hat{\Omega} = ([\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_P])$ 的列矢量得到. 根据渐近性质, 其估计是一致估计, 那么对于某一未知的满秩 $P \times P$ 状态变换矩阵 \mathbf{T} 有 $\Omega_T = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\Omega} = \Omega_L \mathbf{T}$. 又由矩阵 Ω_L 的结构, 相应的变换后的状态矩阵 Φ_T 和观测矩阵 \mathbf{B}_T 能够用下面的形式估计得到

$$\hat{\mathbf{B}}_T = \hat{\Omega}_{1:1}, \quad (12)$$

$$\Phi_T = \hat{\Omega}_{1:L-1}^\# \hat{\Omega}_{2:L}, \quad (13)$$

这里 $\hat{\Omega}_{k,l}$ 表示从 k 到 l 的块行(每一个具有维数 $2M \times P$), $(\cdot)^\#$ 表示矩阵的伪逆, (13)式相对于方程 $\hat{\Omega}_{1:L-1} \Phi_T \approx \hat{\Omega}_{2:L}$ 的最小二乘解.

1.2 信号参数估计

上述的状态空间实现算法提供了一种包含频率和时延信息的系统矩阵的估计, 事实上, (11)~(13)式表明

$$B_T = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{B}_T = BT, \quad (14)$$

$$\Phi_T = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\Phi}_T = T^{-1} \Phi T, \quad (15)$$

由(14)式可以看出矩阵 B_T 和 B 具有相同的值域空间. 又由于(15)式是一相似变换, 那么 Φ_T 和 Φ 具有相同的特征值 $e^{j\omega_m}$ ($m = 1, 2, \dots, P$) (见(9)式). 设 Φ_T 的特征分解为

$$\hat{\Phi}_T = E \Lambda E^{-1},$$

这里 $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_P]$, 从而频率可以由 λ_m 的相角得到, 即

$$\hat{\omega}_m = \angle \lambda_m, m = 1, \dots, P, \quad (16)$$

上式中 \angle 表示取相角, 而且, 由于 E 对角化 Φ_T , 它提供了状态变换矩阵 T^{-1} 的一个估计. 因此, 从(14)式能获得系统矩阵 B 的一个估计: $\hat{B} = \hat{B}_T E$. 再根据 $B(\omega, D)$ 的定义(见(10)式), 有 $\hat{B}_{1:M} \hat{\Delta}(\hat{\omega}, D) = \hat{B}_{M+1:2M}$, 即 $\hat{\Delta}(\hat{\omega}, D) = \hat{B}_{1:M}^\# \hat{B}_{M+1:2M}$ 从而时延 D 的估计由下式给出

$$\hat{D} = \frac{\sum_{m=1}^P \angle \hat{\Delta}_{mm}(\hat{\omega}, D)}{-\sum_{m=1}^P \hat{\omega}_m}, \quad (17)$$

上式中 \angle 表示矩阵 $\hat{\Delta}(\hat{\omega}, D)$ 的第 m 个对角元素的相角.

2 仿真与结论

为验证本文方法的有效性, 做如下的仿真实验:

实验 信号 $s(n)$ 有如下的形式 $s(n) = \alpha_1 e^{j\omega_1 n} + \alpha_2 e^{j\omega_2 n}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/\sqrt{2}$, $\omega_1 = 0.2 \pi \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 0.4 \pi \text{ rad/s}$ 和时延 $D = 0.7s$. 采样时间为 $1s$, 独立实验次数为 200. 算法的精度依赖于参数 M, L 的取值, M 和 L 越大, 性能越高, 但同时计算量也越大, 由大量的仿真实验表明, 在采样数较大的情形下, 当 $2ML = \frac{1}{2}N$ (N 为采样数) 及 $L = P$ (正弦波数目) 时可以获得较精确的估计结果. 在这个实验里, $N = 200$, 因此, 我们取 $M = 25, L = 2$. 假定加性噪声为 Gauss 白噪声, $q_i(t)$ ($i = 1, 2$) 互不相关. 图 1(a)~(c) 分别给出了频率及时延估计的均方误差随信噪比的对比图, 同时为了比较, 用文献[10]的子空间方法(subspace)获得的参数估计结果和相应的 CRLB 也一同给出. 从图 1(a), (b) 中可以看出, 当信噪比大于 0dB 时, 本文方法频率估计的均方误差接近于对应的 CRLB 下界, 同时本文方法的估计性能优于传统的子空间方法, 图 1(c) 表明本文方法也能给出精确的时延估计结果, 而在一定信噪比条件下, 两种方法的性能都接近于相应的 CRLB 界.

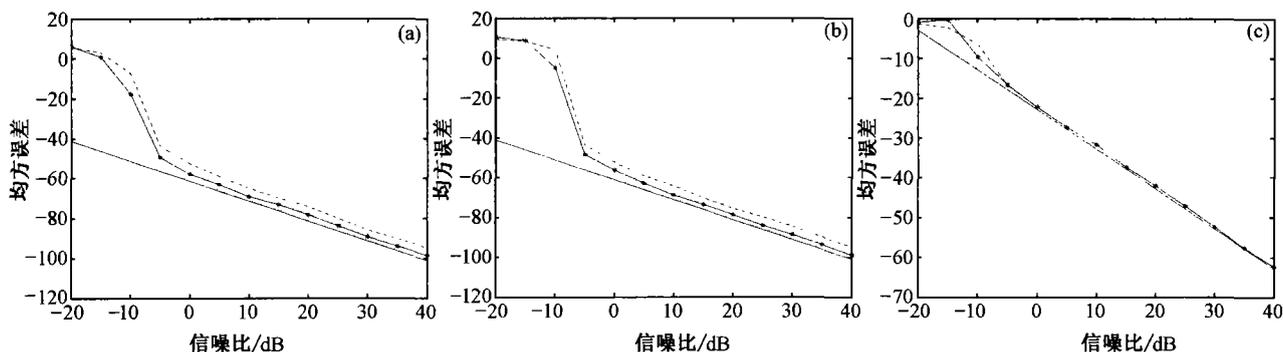
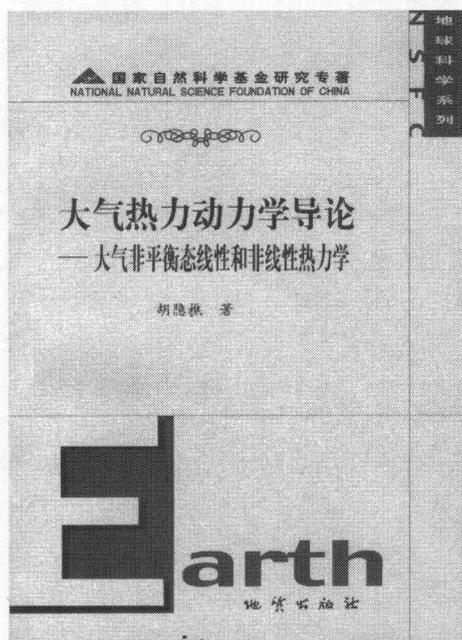


图 1 时延估计的均方差与信噪比图

— 本文方法; 子空间法(subspace)^[10]; CRLB
 (a) $\omega_1 = 0.2 \pi$ 的均方误差; (b) $\omega_2 = 0.4 \pi$ 的均方误差; (c) 时延估计的均方误差

参 考 文 献

- 1 Stoica P, et al. Introduction to Spectral Analysis. New Jersey: Prentice-Hall, 1997
- 2 Carter G C. Time delay estimation for passive sonar signal processing. IEEE Trans, Acoust Speech Signal Processing, 1981, 29(3): 463
- 3 Qian X, et al. Joint estimate of time delay and pitch of voiced speech signals. Conf Rec of the 29th Asilomar Conf Signals, Systems & Computers, 1995, 1: 735
- 4 Dooley S R, et al. Adaptive time delay and frequency estimation for digital signal synchronization in CDMA systems. Conf Rec of the 32th Asilomar Conf Signals Systems & Computers, 1998, 2: 1838
- 5 Sherman D L, et al. Narrowband delay estimation for thalamocortical epileptic seizure pathways. Proc IEEE Int Conf Acoust Speech Signal Processing, 1995, 5: 2939
- 6 Wu H T, et al. Source number estimators using transformed Ger-schgorin radii. IEEE Trans. Signal Processing, 1995, 43: 1325
- 7 So H C. Delay estimation using sinusoidal signals. Proc IEEE Int Conf Acoust Speech Signal Processing, 2000, 5: 3168
- 8 Roy R, et al. ESPRLT-Estimation of signal parameter via rotational invariance techniques. IEEE Trans Acoust Speech Signal Processing, 1989, 7: 984
- 9 Sills J A, et al. Black, Frequency estimation from short pulses of sinusoidal signals Proc. IEEE MILCOM'96, 1996, 3: 979
- 10 Liao, Guisheng. et al. Joint time delay and frequency estimation of multiple sinusoids. ICASSP', USA: Florida, 2001
- 11 Viberg M, et al. A computationally efficient method for joint direction finding and frequency estimation in colored noise. Conf. Record of the Thirty-Second Asilomar Conf. On Signals, Systems & Computers, 1998, 2: 1547
- 12 Prasad S, et al. DOA estimation using stochastic model order reduction via state space modeling. Signal Processing, 1991, 23, 2: 157



国家自然科学基金研究专著

《大气热力动力学导论——大气非平衡态线性和非线性热力学》

胡隐樵 编著

地质出版社 定价：60.00 元

本书是第一部根据大气系统物理特征而建立的大气非平衡态热力学理论专著，是作者尚未发表的科研成果。本书首次分析了经典非平衡态热力学对大气系统的适用性问题；将大气基本物理特征与非平衡态热力学基本原理相结合，重建了适合于大气系统的熵平衡方程。克服了经典非平衡态热力学应用于大气系统的原则性困难。不仅有重要理论价值，而且对分析大气系统状态特征以及天气、气候及环境系统的预报和预测有重要应用价值。全书由浅入深，论证严谨；考虑了多方面读者的需要，全书自成体系，各方面读者可不借助于其他参考书就可读懂。本书主要读者对象是大气科学、海洋科学、环境科学和非线性热力学理论等学科领域大专院校的广大师生、研究生和科研人员以及其他对此感兴趣的广大读者。